

閲覧及び購買行動を同時に表現するアスペクトモデルの提案とその学習法に関する研究

情報数理応用研究

5213C032-8 藤原直広
指導教員 後藤正幸

A Proposal of Aspect Model Expressing Both Browsing and Purchasing Behaviors and Its Learning Algorithm

FUJIWARA Naohiro

1 研究背景・目的

近年、ECサイトでは、膨大な量の情報コンテンツや商品（以下、アイテム）が扱われており、これらの膨大なデータを分析するWebマーケティング技術の重要性が高まっている。特に、ECサイトで扱われるアイテム数が増加し、顧客（以下、ユーザ）の嗜好も多様化していることから、ユーザの嗜好を予測し、各ユーザに最適な推薦を行う推薦システムの必要性が増している[1]。本研究では、ユーザの潜在的な嗜好を予測するモデルの一つであるAspect Model[2]-[4]（以下、AM）に着目する。AMはユーザとアイテムの間に潜在的な嗜好を表わす変数を導入することで、両者の潜在的な意味関係を捉えることができるモデルである。

多くの場合、協調フィルタリング[5]におけるAMのパラメータは、EMアルゴリズム[6]を用いてユーザの購買履歴を学習することで推定される。しかし、現実のECサイト上のデータを考えた場合、ほとんどのユーザの購入アイテムはアイテムの種類に比べて非常に少ないため、購買履歴のデータ密度は非常に小さい。従って、購買履歴のみではパラメータ推定に十分なデータを得ることができず、その正確な推定を行うことは難しい。

一方、ECサイト上には購買履歴の他に閲覧履歴が存在する。多くのユーザは様々なアイテムを閲覧、比較した後、選択したアイテムを購入することが多いため閲覧履歴は購買履歴に比べ膨大に存在する。そのため、購買履歴に比べデータ密度が高い閲覧履歴は、ユーザの嗜好の予測に利用価値が高いと考えられる。しかし、もし閲覧履歴のみを用いてAMのパラメータ推定を行うと、推定される確率は「ユーザがアイテムを閲覧する確率」となり、厳密には購買確率とは異なってしまふ。一方で、少数の購買履歴のみで正確なパラメータ推定が難しい場合、閲覧履歴はユーザの嗜好推定の一助となると考えられる。

そこで本研究では、パラメータ推定精度の向上のために、購買履歴に加え閲覧履歴も活用することで閲覧及び購買行動を同時に表現するAMを提案する。また、EMアルゴリズムを基に提案モデルのパラメータ推定法を導出する。提案モデルは購買履歴だけでなく膨大な閲覧履歴も用いてパラメータ推定を行うため、パラメータの推定精度の向上が期待できる。提案手法の有効性を示すために、経営科学系研究部会連合協議会主催、平成25年度データ解析コンペティションで提供された大手服飾品ECサイトの実データを用いてシミュレーション実験を行う。さらに、人工データを用いたシミュレーション実験を通じて、提案モデルの特徴を明らかにする。

2 準備

2.1 推薦システム

推薦システムは、ユーザが未購入のアイテムの中からユーザの嗜好と一致するアイテムを予測するシステムである[7]。いま、 I 人のユーザ集合を $\mathcal{Y} = \{y_i : 1 \leq i \leq I\}$ 、 J 個のアイテム集合を $\mathcal{X} = \{x_j : 1 \leq j \leq J\}$ とする。こ

の時、ユーザ $u \in \mathcal{Y}$ がアイテム $b \in \mathcal{X}$ を購入したという事象 (u, b) の集合である購買履歴を $\mathcal{D}_p = \{(u_n, b_n)\}_{n=1}^P$ とする。ここで、 $u_n \in \mathcal{Y}$ 、 $b_n \in \mathcal{X}$ であり、 P は購買履歴数である。また本研究では、購買履歴に加え閲覧履歴も用いるため、ユーザ u がアイテム $c \in \mathcal{X}$ を閲覧したという事象 (u, c) の集合である閲覧履歴を $\mathcal{D}_b = \{(u_n, c_n)\}_{n=1}^B$ とする。ここで、 $c_n \in \mathcal{X}$ であり、 B は閲覧履歴数である。また本研究では、購買行動は必ず閲覧が行われた後に行われるものとする。多くの推薦システムでは、購買履歴 \mathcal{D}_p のみを分析することによってユーザが購入しそうなアイテムを予測し推薦を行う。

2.2 Aspect Model

AMは、ユーザの嗜好とアイテムの被購入傾向を推定するために用いられる確率的潜在クラスモデルであり、Hofmannらが協調フィルタリングに対してAMを適用することの有効性を示した[2]-[4]。このモデルはユーザとアイテムの間に潜在クラスを仮定しており、似た嗜好を持つユーザと似た被購入傾向を持つアイテムは同じ潜在クラスに属すると仮定している。さらに、このモデルではユーザとアイテムが唯一の潜在クラスに属するのではなく、複数の異なる潜在クラスに所属することを許容している。この仮定により、このモデルではユーザの嗜好とアイテムの被購入傾向の多様性が表現されている。ここで、AMのグラフィカルモデルは図1で示される。

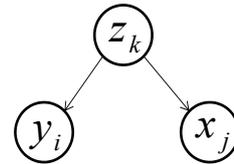


図1. AMのグラフィカルモデル

ここで、 K 個の潜在クラスの集合を $\mathcal{Z} = \{z_k : 1 \leq k \leq K\}$ とし、ユーザ y_i がアイテム x_j を購入するという事象を (y_i, x_j) とする。この時、AMの確率モデルは以下の式(1)で表される。

$$P(y_i, x_j) = \sum_k P(z_k)P(y_i | z_k)P(x_j | z_k) \quad (1)$$

ここで、式(1)の各確率分布 $P(z_k)$ 、 $P(y_i | z_k)$ 、 $P(x_j | z_k)$ は多項分布に従うものとする。これらのパラメータは、EMアルゴリズムを用いて以下の式(2)の対数尤度関数 LL を最大化するように推定される。

$$LL = \sum_i \sum_j n(y_i, x_j) \log P(y_i, x_j) \quad (2)$$

ここで、 $n(y_i, x_j)$ は、購買履歴 \mathcal{D}_p に含まれる (y_i, x_j) の数を表わす。パラメータ推定後、式(3)によって、ユーザ y_i のアイテム x_j に対する購買確率を算出する。

$$\hat{P}(x_j | y_i) = \frac{\sum_k \hat{P}(y_i | z_k) \hat{P}(x_j | z_k) \hat{P}(z_k)}{\sum_k \hat{P}(y_i | z_k) \hat{P}(z_k)} \quad (3)$$

ただし、 $\hat{P}(z_k)$, $\hat{P}(y_i | z_k)$, $\hat{P}(x_j | z_k)$ は EM アルゴリズムにより推定されたパラメータである。一般的に推薦システムでは、この購買確率が高いアイテムから順に各ユーザーに推薦を行う。

3 予備実験

多くの場合、AM のパラメータは購買履歴 D_p を用いて推定される。しかし、現実世界の EC サイト上のデータを考えた場合、多くの EC サイトには何万ものユーザーと何十万のアイテムが存在するため、購買履歴数 P に比べ AM のパラメータ数は非常に多くなる。そのため、購買履歴 D_p はパラメータ推定に十分な情報量を持たず、正確な推定を行うことが難しくなってしまう。

一方、EC サイト上には購買履歴 D_p の他に膨大な量の閲覧履歴 D_b が存在する。EC サイトで購買行動を行うユーザーの多くはあるアイテムを購入する前に、幾つかのアイテムを閲覧し比較を行うため、閲覧履歴数 B は購買履歴数 P に比べ非常に大きくなる。そのため、膨大な量の閲覧履歴を AM のパラメータ推定に用いることは有用であると考えられる。

以下では、閲覧履歴を AM のパラメータ推定に用いることの有効性を示すために、大手服飾品 EC サイトのデータを用いた予備実験を行う。

3.1 実験条件

予備実験では、大手服飾品 EC サイトの 2011 年 9 月 1 日から 2013 年 2 月 28 日までの購買履歴 D_p と閲覧履歴 D_b を学習データとしてモデルの学習に用いる。ここで、ユーザー数 $I = 93,865$ 、アイテム数 $J = 343,260$ 、購買履歴数 $P = 772,253$ 、閲覧履歴数 $B = 25,331,898$ である。またテストデータとして、2013 年 3 月 1 日から 2013 年 3 月 31 日までの購買履歴を用いる。テストデータの購買履歴数は $T = 22,705$ である。また、潜在クラス数は $K = 10$ とした。

用いる手法は、購買履歴を学習した AM と閲覧履歴を学習した AM である。評価手法は以下の式 (4) で定義される TopN 精度を用いた。

$$\text{TopN 精度} = \frac{A}{N \times I} \quad (4)$$

ここで、 N は各ユーザーに推薦するアイテム数、 A は推薦されたアイテムのうち実際に購入されたアイテム数である。この実験では、 $N = 1, 10, 20$ とした。

3.2 実験結果と考察

実験結果を以下の図 2 に示す。

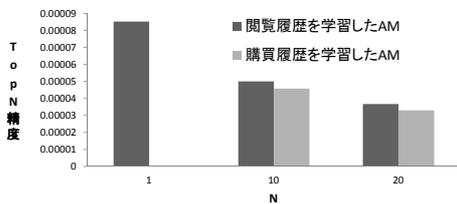


図 2. TopN 精度の比較

実験結果より、閲覧履歴を学習した AM の方が購買履歴を学習した AM より精度が高いことが分かる。これは、データ密度の高い閲覧履歴 D_b を用いたことにより、ユーザーとアイテムの潜在クラスへの所属確率の推定精度が向上したためだと考えられる。

しかし、前述の通り閲覧履歴 D_b を基に推定したパラメータを用いて算出した確率は、「ユーザーがアイテムを閲覧する確率」であり、厳密には購買確率と異なる。そのため、AM のパラメータ推定に有効な閲覧履歴 D_b を活用しつつ、購買確率が推定できるようなモデルに改良する必要があると考えられる。

4 提案手法

本研究では、購買確率を推定するために、閲覧及び購買の両履歴を活用した AM とその学習法を提案する。従来の AM に対して、提案モデルは閲覧及び購買行動を同時に表現することができるモデルとなっている。また、閲覧及び購買の両履歴に対して EM アルゴリズムを基に提案モデルのパラメータ推定アルゴリズムを導出する。

4.1 提案モデル

以下、本節では、閲覧及び購買行動を同時に表現する提案モデルについて述べる。一般に、現実のユーザーの購買行動を考えると、ユーザーは幾つかのアイテムを閲覧し、それらを比較した後に一つのアイテムを購入する。本研究では、閲覧及び購買の両履歴を活用することによって、上記の購買行動を考慮したアスペクトモデルを提案する。提案モデルのグラフィカルモデルは以下の図 3 で示される。

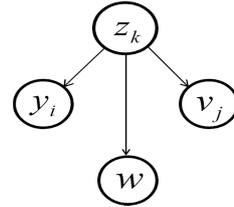


図 3. 提案モデルのグラフィカルモデル

ここで、 v_j は閲覧アイテムを表わし、 $v_j \in \mathcal{X}$ である。また、 w は購買行動を表わす確率変数であり、以下の式 (5) で表される。

$$w = \begin{cases} 1, & \text{あるユーザーがあるアイテムを購入} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \quad (5)$$

提案手法では、ユーザー u がアイテム c を閲覧し、そのアイテムを購入するか否かという事象 (u, c, a) の集合である $D_e = \{(u_n, c_n, a_n)\}_{n=1}^B$ を学習データとしてモデルの学習に用いる。ここで、 $a_n \in \{0, 1\}$ とし、 a_n はユーザー u_n がアイテム c_n を購入していたら 1、そうでなければ 0 を取る。この時、提案モデルにおける n 番目のデータの確率モデルは以下の式 (6) で表される。

$$P(u_n, c_n, a_n) = \sum_k P(z_k) P(u_n | z_k) P(c_n | z_k) \times P(w = 1 | z_k)^{a_n} P(w = 0 | z_k)^{1-a_n} \quad (6)$$

このモデルは、従来の AM と異なり $P(c_n | z_k)$, $P(w | z_k)$ を含んでいるため、閲覧及び購買行動の両方を考慮したモデルとなっている。ここで、 $P(c_n | z_k)$ は潜在クラス z_k に属するユーザーがアイテム c_n を閲覧する確率である。また、 $P(w = 1 | z_k)$ は潜在クラス z_k に属するユーザーがあるアイテムを閲覧した後、そのアイテムを購入する確率である。 $P(w | z_k)$ はベルヌーイ分布を仮定しており、ユーザーがあるアイテムを閲覧した後、そのアイテムを購入するという事象と、購入しないという事象を考慮している。これにより、ユーザーの嗜好は閲覧と購買行動の両方によって特徴付けされる。

4.2 提案モデルのパラメータ推定

本節では、提案モデルのパラメータ推定法について述べる。本研究では、提案モデルのパラメータ推定を EM アルゴリズムを適用することによって導出する。式 (6) に対する対数尤度関数 LL' は、以下の式 (7) で表される。

$$LL' = \sum_{n=1}^B \log P(u_n, c_n, a_n) \quad (7)$$

対数尤度関数 LL' を最大化するようなパラメータは、EM アルゴリズムを適用することによって式 (8)-(13) より推定される。

【E ステップ】

$$P(z_k | u_n, c_n, a_n) = \frac{P(u_n, c_n, a_n, z_k)}{P(u_n, c_n, a_n)} \quad (8)$$

【M ステップ】

$$P(z_k) = \frac{\sum_n P(z_k | u_n, c_n, a_n)}{\sum_n \sum_k P(z_k | u_n, c_n, a_n)} \quad (9)$$

$$P(y_i | z_k) = \frac{\sum_n \delta(u_n = y_i) P(z_k | u_n, c_n, a_n)}{\sum_n P(z_k | u_n, c_n, a_n)} \quad (10)$$

$$P(v_j | z_k) = \frac{\sum_n \delta(c_n = v_j) P(z_k | u_n, c_n, a_n)}{\sum_n P(z_k | u_n, c_n, a_n)} \quad (11)$$

$$P(w = 1 | z_k) = \frac{\sum_n P(z_k | u_n, c_n, a_n) a_n}{\sum_n P(z_k | u_n, c_n, a_n)} \quad (12)$$

$$P(w = 0 | z_k) = \frac{\sum_n P(z_k | u_n, c_n, a_n) (1 - a_n)}{\sum_n P(z_k | u_n, c_n, a_n)} \quad (13)$$

ここで $\delta(\cdot)$ は () 内 が真であれば 1, そうでなければ 0 を取る指示関数である. E ステップでは, 閲覧及び購買の両履歴に対して潜在変数 z_k の事後確率を計算する. この事後確率 $P(z_k | u_n, c_n, a_n)$ は, M ステップで推定された各パラメータを用いて計算される.

M ステップでは, E ステップで算出された事後確率を用いて各パラメータの更新を行う. これら推定したパラメータを用いて, 再び E ステップに戻り事後確率を更新し, 対数尤度関数 LL' が収束するまで E ステップと M ステップを繰り返す.

4.3 購買確率の算出

パラメータ推定後, 推定したパラメータを用いて購買確率を算出する. ここで, ユーザはアイテムを購入する時, 必ず購入前にそのアイテムを閲覧しているという仮定に着目する. 現実のユーザの購買行動を考えた時, ユーザは自分の興味のあるアイテムを何度か閲覧してから購入の意思決定をすることが多いため, ユーザが過去に閲覧したアイテムは購入される可能性が高いと考えられる. そこで本研究では, ユーザがアイテムを閲覧している場合とそうでない場合で異なる購買確率の計算方法を用いる.

もし, ユーザ y_i がアイテム v_j を閲覧している場合, 購買確率 $P(w = 1, v_j | y_i, t_{ij} = 1)$ を式 (14) で計算する.

$$P(w = 1, v_j | y_i, t_{ij} = 1) = \frac{\sum_k \alpha_{ijk} \hat{P}(v_j | z_k) \hat{P}(w = 1 | z_k)}{\sum_k \alpha_{ijk}} \quad (14)$$

ただし, $\alpha_{ijk} = \hat{P}(z_k) \hat{P}(y_i | z_k) \{1 - \{1 - \hat{P}(v_j | z_k)\}^{N(z_k)}\}$ であり, t_{ij} はユーザ y_i がアイテム v_j を閲覧していたら 1, そうでなければ 0 を取る指示関数である. また, $N(z_k)$ は潜在クラス z_k に属するユーザの平均アイテム閲覧回数である. この平均アイテム閲覧回数 $N(z_k)$ は以下の式 (15) で求められる.

$$N(z_k) = \frac{\sum_i M(y_i) \hat{P}(z_k | y_i)}{\sum_i \hat{P}(z_k | y_i)} \quad (15)$$

ここで, $M(y_i)$ は, ユーザ y_i のアイテム閲覧回数である.

また, ユーザ y_i がアイテム v_j を閲覧していない場合, 購買確率 $P(w = 1, v_j | y_i, t_{ij} = 0)$ は式 (16) で計算される.

$$P(w = 1, v_j | y_i, t_{ij} = 0) = \frac{\sum_k \beta_{ijk} \hat{P}(v_j | z_k) \hat{P}(w = 1 | z_k)}{\sum_k \beta_{ijk}} \quad (16)$$

ここで, $\beta_{ijk} = \hat{P}(z_k) \hat{P}(y_i | z_k) \{1 - \hat{P}(v_j | z_k)\}^{N(z_k)}$ である.

5 実データを用いた実験

提案手法の有効性を示すために, 前出の大手服飾品 EC サイトのデータを用いたシミュレーション実験を行う.

5.1 実験条件

実験条件は 3.1 節の予備実験と同様である. 提案手法では D_e を学習データとして用い, 提案手法と閲覧履歴を学習した AM を用いて購買予測を行い, 精度の比較を行う. 評価については式 (4) で表される TopN 精度を用いるものとした.

5.2 実験結果と考察

実験結果を以下の図 4 に示す.

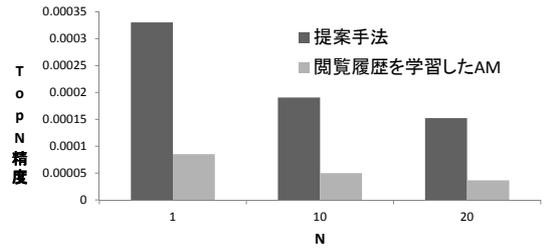


図 4. TopN 精度の比較

実験結果より, 提案手法の精度が閲覧履歴を学習した AM の精度より高いことが分かる. 閲覧履歴を学習した AM では, 「ユーザがアイテムを閲覧する確率」が推定され, ユーザがどのアイテムを購入しやすいかを推定することはできない. 一方, 提案モデルでは, 閲覧履歴に加え購買履歴も用いることにより, ユーザの購入しやすいアイテムを推定できるため, 購買確率の推定精度が向上したと考えられる. また提案モデルは, 閲覧及び購買行動の両方によりユーザの嗜好が同定されるため, ユーザの嗜好をより精度よく表現できていると考えられる. 以上の理由により, 提案手法は閲覧履歴を学習した AM より精度が高くなったと考えられる.

6 人工データを用いた実験

実データを用いた実験では, 閲覧履歴を学習した AM に比べ提案手法が有効であることを示した. 以下では, 提案手法がどのような状況のときに精度が良くなるか検証するため, 人工データを用いた実験を行う. 前述の通り, 提案モデルは閲覧及び購買行動を同時に表現できるモデルとなっているため, 閲覧傾向と購買傾向に差異がある場合, つまりユーザの閲覧しやすいアイテムと購入しやすいアイテムが完全一致しない場合には, 提案手法の精度が向上すると考えられる.

6.1 人工データの生成手順

この実験では, 閲覧傾向と購買傾向に差異があるような人工データを生成する. 生成手順について以下に述べる.

【閲覧履歴データの生成】

ユーザ, アイテムを U 個のグループに分け, 同じグループに所属するユーザは似た閲覧傾向を持つと仮定する. また, 各ユーザは同じグループに所属するアイテムを閲覧しやすいものとする.

- Step 1 ユーザ y_i をランダムに一つ選択する.
- Step 2 選択されたユーザ y_i が α ($0 \leq \alpha \leq 1$) の確率で同じグループに所属するアイテム群を, $(1 - \alpha)$ の確率でそれ以外のアイテム群を選択する.

- Step 3 選択したアイテム群の中からアイテム v_j をランダムに一つ選択する. これを閲覧履歴データ (y_i, v_j) とする.

これを学習データ数 M 個分繰り返し閲覧履歴データを生成する.

【購買履歴データの生成】

まず, 各グループに所属するアイテムの内, 半分を購入されやすいアイテムとする. 各閲覧履歴データ (y_i, v_j) に対して, アイテム v_j がユーザ y_i が購入しやすいアイテムであれば $\beta(0 \leq \beta \leq 1)$ の確率で, それ以外のアイテムであれば $\gamma(0 \leq \gamma \leq 1)$ の確率でそのアイテムを購入する.

6.2 実験条件

この実験では, ユーザ数 $I = 1,000$, アイテム数 $J = 2,000$ とする. また, データ生成には $U = 5$, 潜在クラス数 $K = 70$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (0.8, 0.2, 0.02)$ と設定した. 学習データ数 M は, 10,000 件から 100,000 件までの 10,000 件刻みとし, 繰り返し 100 回の実験を行い, その平均を精度として用いた. 評価尺度は以下の式 (17) で表される TopN 精度を用い, 推薦したアイテムが各ユーザの購入しやすいアイテム群に含まれていれば正解とする.

$$\text{TopN 精度} = \frac{A'}{N \times I} \quad (17)$$

ここで, A' は推薦されたアイテムのうち, 購入しやすいアイテム群に含まれるアイテムの数である. この実験では, 提案手法, 閲覧履歴を学習した AM, 購買履歴を学習した AM を用いて購買予測を行い, 精度の比較を行った.

また, 学習データ数を $M = 50,000$ に固定し, α の値を 0.1 から 0.9 まで 0.1 刻みに変化させた時の予測精度の比較も行う. ここで α の値が大きいく程, 各ユーザの購入しやすいアイテムの閲覧数が増えるため, 同じ学習データ数に対する購買履歴数は増加する.

6.3 実験結果と考察

パラメータを固定し学習データ数を変化させた時の実験結果を以下の図 5 に示す.

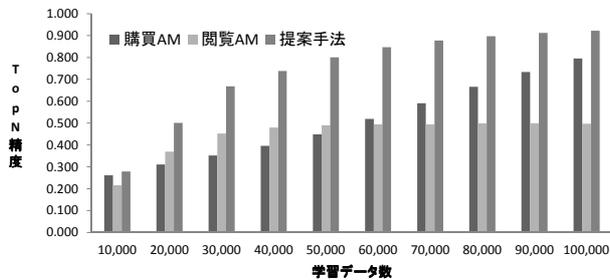


図 5. TopN 精度の比較 (0.8, 0.2, 0.02)

図 5 より, 提案手法は 2 つの比較手法と比べ, 全ての場合において精度が高いことが分かる. 購買履歴を学習した AM は, 購買履歴が十分量存在しない時, パラメータ数に対しデータ数が相対的に少なくなるためパラメータ推定が正確に行われないと考えられる. また閲覧履歴を学習した AM は, 購買傾向と閲覧傾向の差異を表現できないモデルであると考えられる. 一方, 提案手法は購買履歴に加え閲覧履歴も用いたモデルの学習を行っており, 購買傾向と閲覧傾向の差異を表現できるモデルとなっている. そのため, パラメータ推定精度が向上し提案手法の精度が高くなったと考えられる.

また, 閲覧履歴を学習した AM ではデータ数が増えても購買履歴の情報は考慮されないため, データ数が増加しても精度が 0.500 付近で止まっている. 一方, 提案モデルは, 閲覧及び購買行動を同時に表現するモデルとなっているため, データ数が増加するにつれ予測精度が高くなっていると考えられる.

次に, 学習データ数を 50,000 に固定しパラメータ α を変化させた時の実験結果を以下の図 6 に示す.

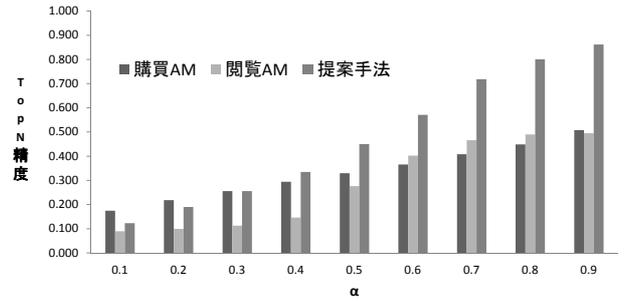


図 6. α の違いによる TopN 精度の比較

図 6 より, 提案手法, 比較手法共に α の値が大きいくほど精度が高くなることから分かる. これは α の値が大きいくほど, 同じ学習データ数に占める購買履歴数が増え, より正確に購買確率の推定が可能であるためだと考えられる. また, α の値が大きいくほど, 各ユーザが購入しやすいアイテムの閲覧数が増えるため, 提案手法と閲覧履歴を用いた AM の精度が高くなったと考えられる.

一方, $\alpha = 0.1, 0.2$ の時, 提案手法の精度が購買履歴を用いた AM の精度より低くなっている. α の値が小さくなると, 各ユーザが購入しにくいアイテムの閲覧数が増え, 購入しやすいアイテムの閲覧数が減る. これにより提案手法ではユーザの購入しやすいアイテムの推定が困難になり, 購買確率の推定精度が低くなったと考えられる.

7 まとめと今後の課題

本研究では, 閲覧行動及び購買行動を同時に表現する AM とその学習法を提案した. また, 実データを用いた実験により提案手法の有効性を示した. さらに, 人工データを用いた実験により, 提案手法がどのような場合に精度が良くなるか検証し, 閲覧傾向と購買傾向が異なるような場合に有効であることを明らかにした.

今後の課題として, 購買回数や閲覧回数等の他の情報も用いたモデルの構築が考えられる. また, 各潜在クラスに所属するユーザの特徴を分析することも今後の課題である.

参考文献

- [1] B. Sarwar, G. Karypis, J. Konstan and J. Riedl, "Application of Dimensionality Reduction in Recommender System," *ACM WebKDD Workshop*, 2000.
- [2] T. Hofmann and J. Puzicha, "Latent Class Models for Collaborative Filtering," *Proc. 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp.688–693, 1999.
- [3] T. Hofmann, "Probabilistic Latent Semantic Analysis," *UAI*, 289-296, 1999.
- [4] T. Hofmann, "Latent Semantic Models for Collaborative Filtering," *ACM Transactions on Information Systems*, Vol.22, No.1, 89-115, 2004.
- [5] J. L. Herlocker, J.A. Konstan, L. Terveen and J. Riedl, "Evaluating Collaborative Filtering Recommender Systems," *Journal of ACM Transactions on Information Systems*, Vol.22, No.1, pp.5-53, 2004.
- [6] A.P. Dempster, N.M. Laird and D.B. Rubin, "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm," *J. Royal Statistical Society. Series B*, vol.39, no.1, pp.1-38, 1997.
- [7] 神島敏弘, "推薦システムのアルゴリズム (2)," *人工知能学会誌*, vol.23, no.1, pp.89-103, 2008.